Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik

Preprint No. M **17/06**

About circuits in finite lattices - Über Kreise in endlichen Gittern

Peter E. John

Juli 2017

URN: urn:nbn:de:gbv:ilm1-2017200370

Impressum:
Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik
Weimarer Straße 25
98693 Ilmenau
Tel.: +49 3677 69-3621
Fax: +49 3677 69-3270
http://www.tu-ilmenau.de/math/

About circuits in finite lattices - Über Kreise in endlichen Gittern

Peter E. John
Institut für Mathematik
der TU Ilmenau

Schlüsselwörter: Kreislängen, zyklische Gruppen, gerichtete Graphen

Der hier zu behandelnde Sachverhalt resultiert aus Untersuchungen zu toroidalen Strukturen.

1) Grundlegende Begriffe und Definitionen

Gegeben sind die natürlichen Zahlen a, b, c $\geq$ 1. Mit G = G(a, b, c) werde ein a–b–c-Gitter bezeichnet, das mit einem kartesischem Koordinatensystem K(O; i, j, k), O als Ursprung und den i-, j- und k-Achsen, versehen ist. Die Menge der Gitterpunkte von G sei **P** = **P**(G) = **P**(a, b, c) = {(i, j, k); $1 \leq i \leq a$, $1 \leq j \leq b$, $1 \leq k \leq c$}. Δ = Δ(G) gibt die Dimension und n = n(**P**) die Anzahl der Punkte von Gitter G an.
Spezielle Gitter sind:
Gitter G(1, 1, 1) hat genau einen Punkt (1, 1, 1).
Ist a $\geq$ 2, so ist für G(a, 1, 1) =: G(a) mit der Dimension Δ = 1,
für a, b $\geq$ 2 sind G(a, b, 1) =: G(a, b) und Δ = 2,
und mit a, b, c $\geq$ 2 ist G = G(a, b, c) und Δ = 3.
Die Punktmengen **P**(a) = {i; $1 \leq i \leq a$} und **P**(a, b) = {(i, j); $1 \leq i \leq a$, $1 \leq j \leq b$ } von Gitter G(a) bzw. G(a, b) sind Teilmengen der Menge **P** = **P**(a, b, c).

Neben Gitter G mit Dimension Δ wird eine Vorschrift V = VΔ benötigt, die einem aus der Menge **P**(G) gewählten Punkt p einen Punkt p‘ der Menge **P**(G) zuordnet, kurz: $p \to p$‘. Punkt p ‘ heiße *Nachfolger* von p und p werde *Vorgänger* von p‘ genannt.

Eine Vorschrift V für Gitter G heiße *linear*, falls deren Koordinaten lineare Funktionen in i, j bzw. k sind. Für Δ = 3 mit Gitter G = G(a, b, c) und $1 \leq d, d' \leq a$, $1 \leq e, e' \leq b$ und $1 \leq f, f' \leq c$ ist diese gegeben zu:

Startpunkt p = (i, j, k) wird verbunden mit
p‘ = (d‘i + d, j, k), falls d‘i + d ≤ a, mit
p‘ = (d‘i + d,e‘j + e, k), falls d‘i + d > a und e‘j + e ≤ b, bzw. mit (V3)
p‘ = (d‘i + d, e‘j + e, f‘k + f), falls e‘j + e > b und
ansonsten (mod a), (mod b) und (mod c) rechnen.

Setzt man in (V3) z.B. d = d‘ = a, e = e‘ = b und f = f‘ = c, so hat Punkt p von **P**(a, b, c) den Nachfolger p‘ = (a, b, c) und p‘ hat alle Punkte von **P**(a, b, c) als Vorgänger.

Vorschrift V für Gitter G heiße *einfach*, falls die Koeffizienten d‘ = e‘ = f‘ = 1 sind.

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf einfache Vorschriften, wobei z.B. für Δ = 3 die Vereinigung von G mit V als GV := (a, d; b, e; c, f) gesetzt wird.

Es wird in einem Punkt $p \in \mathbf{P}(G)$ gestartet und nach endlich vielen Schritten wird wieder Punkt p erreicht, also $p \to p' \to p'' \to p''' \to \ldots \to p$. Das Resultat ist ein Kreis C = C(GV: p) und $p = p$(C). **P**(C) sei die Menge der nach Vorschrift V durchlaufenen Punkte von Gitter G, in der Punkt p enthalten ist. Ist **P**(C) = **P**, so hat man genau einen Kreis C.
Ist $\mathbf{P}(C) \neq \mathbf{P}$, so wählt man einen Punkt $p^* \in \mathbf{P} - \mathbf{P}(C)$ und erhält mit Vorschrift V einen zu Kreis C „parallelen Kreis" C*= C(GV: p(C*)), usw. … , bis jeder Punkt von **P** in einem Kreis angetroffen wird. Das Ergebnis ist eine Menge von Kreisen gleicher Länge, die alle Punkte von G überdecken (siehe auch Bemerkung 2).
Somit wird durch Vorschrift V das Gitter G auf sich selbst abgebildet, kurz G $\to$ G.

In dieser Arbeit interessiert die Länge eines Kreises C in Abhängigkeit von GV.

2) Die Länge eines Kreises C = C(GV: p = p(C))

Die Anzahl der Gitterpunkte von Kreis C werde als Länge l(C) von C bezeichnet. Hier werden die Fälle Δ = Δ(G) = 1, 2, 3 behandelt, wobei die Länge l(C) im Falle Δ = 3 mit verschiedenen Vorschriften untersucht wird.
Die Beispiele dazu sind so gewählt, dass die Koordinatenangabe eines Gitterpunktes ohne Klammern und Kommatas erfolgt.

2.1) **Δ = 1**: GV =(a, d)
Startpunkt p = i wird verbunden mit
p' = i + d (mod a). (V1)

Nach höchstens a Schritten ist man wieder beim Punkt p = i angelangt. Die Länge eines so gebildeten Kreises C = C(a, d: p) werde mit l(C) =: l(a, d) bezeichnet. Ist δ = g(a, d) der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen a und d, so sind a' = a/δ und d' = d/δ . Damit gilt der einfache

<u>Satz 1</u>:
l(C) = l(a, d) = l(a', d') = l(a', 1) = a'. (1)

<u>Bemerkung 1</u>:
Da a' und d' teilerfremd sind kann l(a', d') auch durch l(a', 1) ersetzt werden.

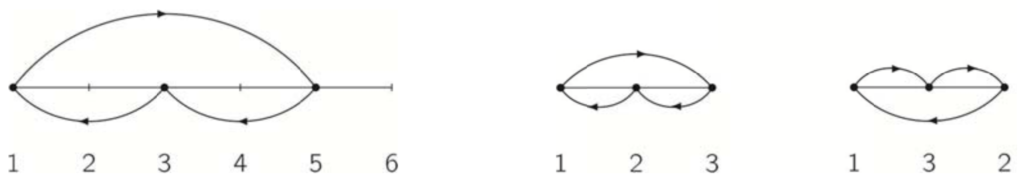

Abb. 1 Kreis C(6, 4: 1) und Kreis C'(3, 2: 1)

<u>Beispiel 1 (Abb. 1)</u>:
Gegeben sind G(a = 6) und V1 mit d = 4, womit GV = (6, 4) vorliegt. Die Länge l(C) = l(6, 4) ist nach (1) gegeben zu l(C) = l(3, 2) = 3. In GV ergibt sich, bei p = 1 beginnend der Kreis C = C(6, 4: 1) zu: 1 $\to$ 5 $\to$ 3 $\to$ 1. Da hier δ = g(6, 4) = 2 ist, kann GV in (zwei) G'V = (3, 2) überführt werden und somit der Kreis C = C(6, 4: 1) in den Kreis C' = C(3, 2: 1) mit der Punktfolge 1 $\to$ 3 $\to$ 2 $\to$ 1 übergeht.

In allen weiteren Fällen wird vorausgesetzt, dass g(a, d) = g(b, e) = g(c, f) = 1 ist.

2.2) **Δ = 2**: GV = (a, d; b, e)
Startpunkt $p = (i, j)$ wird mit
$p' = (i + d, j)$ verbunden, falls $i + d \le a$, und mit (V2)
$p' = (i + d, j + e)$, falls $i + d > a$, $i + d \pmod a$ und $j + e \pmod b$ sind.

Nach höchstens ab Verbindungen gelangt man zum Ausgangspunkt $p = (i, j)$ zurück und hat somit einen Kreis C = C(GV: p) der Länge l(C) =: l(a, d; b, e).

Bemerkung 2:
Wird Punkt $p^\# = (l^\#, j^\#) \in \mathbf{P}(a, b)$ als Anfang gewählt, so ergibt sich ein Kreis $C^\# = C(a, d; b, e: p(C^\#))$, der die gleiche Länge wie Kreis C hat, also $l(C) = l(C^\#)$. Denn ist Punkt $(l^\#, j^\#)$ in Kreis C enthalten, so $C = C^\#$. Ist Punkt $(l^\#, j^\#)$ nicht in C, dann geht Kreis $C^\#$ mittels der Verschiebung $(l^\# - i, j^\# - j)$ unter Beachtung von $l^\# - i \pmod a$ und $j^\# - j \pmod b$ aus Kreis C hervor. Beide Kreise sind dann „parallel“ im Gitter G(a, b).

Satz 2:
Die Länge von Kreis C = C(GV: $p(C)$) errechnet sich zu
$l(C) = l(a, d; b, e) = l(ab, d) = ab'$ und $b' = b/g(b, d)$. (2)

Beweis:
Ähnlich wie beim linearen Fall kann bei C = C(a, d; b, e: $p(C)$) von G = G(a, b) vorgegangen werden. Die Zahlen a, d bzw. b, e sind teilerfremd. Die Spalten von G werden zu einem neuen Gitter G‘ umgeordnet: für k = 0, 1, …, b – 1 wird die (1 + ke)-te Spalte von G zur (1 + k)-ten Spalte von G‘; man beachte $1 + ke \pmod b$. Deshalb kann Kreis C auch durch den Kreis C‘ = C(a, d; b, 1; $p(C')$) ersetzt werden, der die gleiche Länge wie Kreis C hat, also l(C) = l(C‘).
Jetzt können die ab Punkte von G‘ in eine lineare Anordnung L*= L(n*, t*) überführt werden, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit z.B. $p = (i = 1, j = 1)$ gesetzt werde. Man erhält so die eindimensionale Anordnung aller Punkte von P(a, b): $(1,1) \to \ldots \to (a,1) \to (1,1 + e) \to \ldots \to (a, 1 + e) \to (1,1 + 2e) \to \ldots \to (1, 1 + (b – 1)e) \to \ldots \to (a, 1 + (b – 1)e)$. Der Kreis C‘ von G‘ ist in den Kreis C* = C(a*, d*; $p(C^*)$) übergegangen, wobei a* = ab und d* = d sind.
Somit ist l(C*) = l(C‘). (3)

Wegen (1), (V2) und (3) findet man schließlich für die Länge l(C) von Kreis C

l(C) = l(C*) = l(a*, d*) = l(ab, d) = ab/g(ab, d) = ab/g(b, d) = ab‘ und b‘ = b/g(b, d). ☺

Folgerung: l(a, d; b, e) = l(a, d; b, 1). (4)

Bei der Berechnung von l(C) = l(a, d; b, e) ist somit „von rechts nach links“ vorzugehen. Deshalb führen wir eine neue Kreisverknüpfung ein: In einem u–x-Gitter G(u, x) sei der Kreis $C_3 = C(u, v; x, y: p(C_3))$ gegeben, wobei u, v, x, y natürliche Zahlen sind, die folgenden Bedingungen genügen: $2 \le u, x$, $1 \le v < u$, $1 \le y < x$ und u, v sowie x, y teilerfremd. Der Kreis C_3 ist somit das Resultat einer Verknüpfung der beiden Kreise $C_1 = C(u, v: p(C_1))$ und $C_2 = C(x, y: p(C_2))$ auf dem Gitter G(u, x), und unter Beachtung von (V2). Hierbei setze man $p(C_3) = p(C_2)p(C_1)$. In die Berechnung von l(u, v; x, y) des Kreises C_3 geht diese Kreisverknüpfung „von rechts nach links“ mit dem Zeichen „$\Leftarrow$“ ein:

$l(u, v; x, y) := l((u, v) \Leftarrow (x, y))$. $(\Leftarrow)$

Und mit Satz 2 ist $l((u, v) \Leftarrow (x, y)) = l(ux, v) = l(ux', v')$, wobei $x' = x/g(v, x)$ und $v' = v/g(v, x)$ sind.

Bemerkung 3:

Man erkennt sofort, dass diese Verknüpfung im allgemeinen nicht kommutativ ist.
Für $\underline{C}$ =C(b, e; a, d: $p(\underline{C})$) und C = C(a, d; b, e: $p(C)$) gilt trivialerweise:
l($\underline{C}$) = l((b, e) $\Leftarrow$ (a, d)) = l((a, d) $\Leftarrow$ (b, e)) = l(C) genau dann, wenn g(a, e) = g(b, d).

Bemerkung 4:

Sind p, q $\geq$ 1 natürliche Zahlen, so berechnet sich die Länge des Kreises C = C(ap, dp; bq, eq: p) im Gitter G(ap, bq) nach der Formel l(ap, dp; bq, eq) = l(a, d; b, e). (6)
Hier kann die Punktmenge P(ap, bq) von Gitter G(ap, bq) in paarweise disjunkte Teilmengen $P_{i'j'}$ = $P_{i'j'}$(a, b) = {(i' + kp, j' + lq); k = 0,…, a – 1, l = 0,…, b – 1) zerlegt werden, wobei i' = 1,…, p, j' = 1,…, q sind. Jeder Menge $P_{i'j'}$ kann ein Gitter $G_{i'j'}$ = $G_{i'j'}$(a, b) zugeordnet werden und Kreis C wird in genau einem pq Gitter, sagen wir G(a, b), angetroffen.

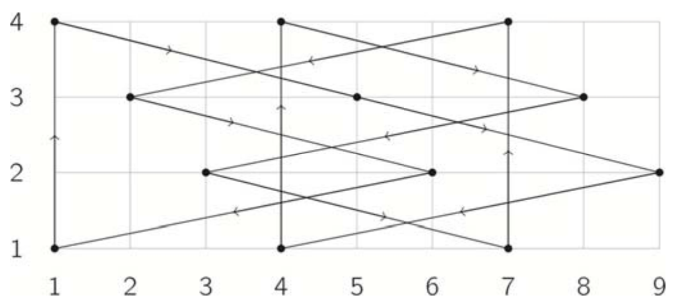

Abb. 2.1 Kreis C = C(4, 3; 9, 4: p = 11)

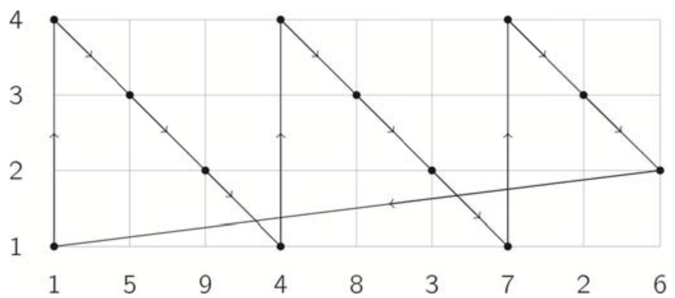

Abb. 2.2 Kreis C'

Beispiel 2 (Abb. 2):

Gegeben sei das Gitter G(4, 9), Vorschrift V2 mit d = 3, e = 4 und damit ein Kreis C = C(4, 3; 9, 4: p).
Die Punktfolge von C ist, bei $p = 11$ beginnend:
11 $\rightarrow$ 41 $\rightarrow$ 35 $\rightarrow$ 29 $\rightarrow$ 14 $\rightarrow$ 44 $\rightarrow$ 38 $\rightarrow$ 23 $\rightarrow$ 17 $\rightarrow$ 47 $\rightarrow$ 32 $\rightarrow$ 26 $\rightarrow$ 11.
In Abb. 2.2 ist Kreis C = C' im Gitter G' = G'(4, 9) nach der Spaltenumordnung zu sehen; die eindimensionale Anordnung wird deutlich.
Die Länge l(C) des Kreises C ergibt sich zu l(C) = l(C')= l(4 $\cdot$ 9, 3) = l(4 $\cdot$ 3, 1) = 12.

2.3) **Δ = 3:** GV = (a, d; b, e; c, f)

2.3.1) Startpunkt p = (i, j, k) wird verbunden mit
p' = (i + d, j, k), falls i + d ≤ a, mit
p' = (i + d, j + e, k), falls i + d > a und j + e ≤ b, bzw. mit (V3)
p' = (i + d, j + e, k + f), falls j + e > b und
ansonsten (mod a), (mod b) und (mod c) rechnen.

Hier kann auch sofort f = 1 gesetzt werden, sodass der Kreis C = C(a, d; b, e; c, f: p) zum Kreis C‘ = C(a, d; b, e; c, 1: $p(C‘)$) mit l(C‘) = l(C) wird. Mit dem Resultat von Satz 1 und ($\Leftarrow$) lässt sich die Länge l(C‘) von Kreis C’und somit von Kreis C leicht ermitteln.

Wegen Satz 1 und ($\Leftarrow$) erhält man l(C) = l((a, d) $\Leftarrow$ [(b, e) $\Leftarrow$ (c, 1)] = l((a, d) $\Leftarrow$ (bc, e)) = l((a, d) $\Leftarrow$ (bc‘, e‘)) = l((a, d) $\Leftarrow$ (bc‘, 1)), mit c‘ = c/r, e‘ = e/r und r = g(c, e).
Nochmalige Anwendung von Satz 1 ergibt mit s = g(bc‘, d) und (bc‘)‘ = bc‘/s, d‘ = d/s den

Satz 3:
Die Länge l(C) = l(a, d; b, e; c, f) von Kreis C = C(a, d; b, e: c, f; $p(C)$) errechnet sich zu
l(C) = a(bc‘)‘ = abc‘/s = abc/rs, wobei (bc‘)‘ = bc‘/s, r = g(c, e) und s = g(bc‘, d) sind . ☺ (5)

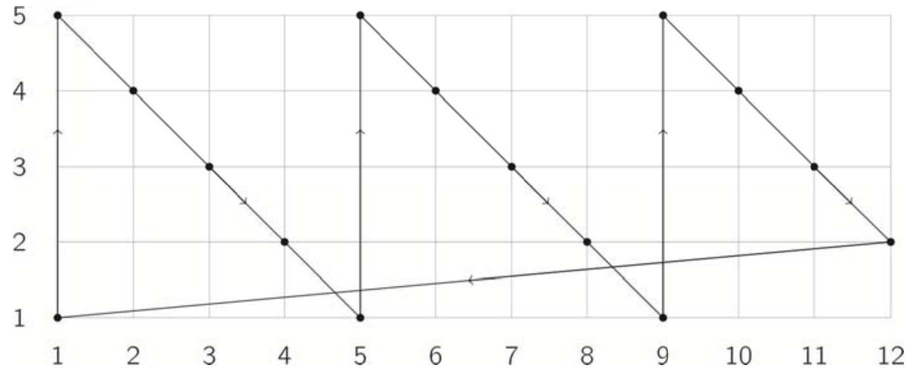

Abb. 3 Kreis C(5, 4; 12, 1: $p = 11$).

Beispiel 3 (Abb. 3):
Gegeben ist das Gitter G(5, 4, 9), Vorschrift V3 mit d = 4, e = 3, f = 4 und deshalb ein Kreis C = C(5, 4; 4, 3; 9, 4: $p(C)$). Die Länge von Kreis C ist l(C) = l((5, 4; 4, 3; 9, 1)) = l((5, 4) $\Leftarrow$ [(4, 3) $\Leftarrow$ (9,1)]). Mit dem Ergebnis von Satz 2 und Beispiel 2 ist l((4, 3) $\Leftarrow$ (9,1)) = l(12, 1) und somit ist l(C) = l((5, 4) $\Leftarrow$ (12; 1)), was schließlich (s. Abb. 3) l(C) = l(15, 1) = 15 ergibt. Die Folge der Gitterpunkte ist: $p(C)$ = 111 $\rightarrow$ 511 $\rightarrow$ 441 $\rightarrow$ 332 $\rightarrow$ 223 $\rightarrow$ 114 $\rightarrow$ 514 $\rightarrow$ 444 $\rightarrow$ 335 $\rightarrow$ 226 $\rightarrow$ 117 $\rightarrow$ 517 $\rightarrow$ 447 $\rightarrow$ 338 $\rightarrow$ 229 $\rightarrow$ 111.

Bemerkung 5:
Das Assoziativgesetz für die Verknüpfung „$\Leftarrow$“ gilt allgemein nicht. Dazu wählen wir den Kreis von Beispiel 3. Es ist
l((5, 4; 4, 3; 9, 1)) = l((5, 4) $\Leftarrow$ [(4, 3) $\Leftarrow$ (9, 1)]) = l((5, 4) $\Leftarrow$ (12, 1)) = l(15, 1) = 15 und
l([(5, 4) $\Leftarrow$ (4, 3)] $\Leftarrow$ (9, 1)) = l((5, 1) $\Leftarrow$ (9, 1)) = l(45, 1) = 45. Hierbei ist der größte gemeinsame Teiler g(c = 9, e = 3) = 3 nicht berücksichtigt.

l([(a, d) $\Leftarrow$ (b, e)] $\Leftarrow$ (c, 1)) = l((ab‘, d‘) $\Leftarrow$ (c, 1)) mit b‘ = b/g(b, d), d‘ = d/g(b, d) und
l((ab‘, d‘) $\Leftarrow$ (c, 1)) = l(ab‘c‘, d‘‘) = ab‘c‘ und c‘ = c/ g(c, d‘) = c/g(c, d/g(b, d)).
Also ist ab‘c‘ = abc/{g(b, d) $\cdot$ g(c, d/g(b, d)} = abc/{g(c $\cdot$ g(b, d), d)}
Andererseits ist l((a, d) $\Leftarrow$ [(b, e) $\Leftarrow$ (c, 1)] = l((a, d) $\Leftarrow$ (bc*, e*)) und c* = c/g(c, e), e* = e/g(c, e) und l((a, d) $\Leftarrow$ (bc*, e*)) = l(a(bc*)*, d*) = a(bc*)*, wobei (bc*)* = bc*/g(bc*, d) und d* = d/g(bc*, d) sind.
Somit ist a(bc*)* = abc*/ g(bc*, d) = abc/{g(c, e) $\cdot$ g(bc/g(c, e), d)} = abc/g(bc, d $\cdot$ g(c, e)).

Das Assoziativgesetz gilt genau dann, wenn g(c $\cdot$ g(b, d), d) = g(bc, d $\cdot$ g(c, e)) ist.
Beispiel 3 ergibt
g(c $\cdot$ g(b, d), d) = g(9 $\cdot$ g(4, 4), 4) = 4 $\neq$ 12 = g(4 $\cdot$ 9, 4 $\cdot$ g(9, 3)) = g(bc, d $\cdot$ g(c, e)).

2.3.2) Startpunkt p = (i, j, k) wird verbunden mit
p‘ = (i + d, j + e, k + f), (V3[§])
wobei (mod a), (mod b) bzw. (mod c) gerechnet werde.

Es ist leicht einzusehen, dass für die Länge l(C) von Kreis C = C(GV: p) nur das kleinste gemeinsame Vielfache von a, b und c in Betracht kommt, also l(C) = kgV(a, b, c). (6)

Denn beginnen wir bei (i, j, k) so ist nach a Schritten (i, j‘, k‘), nach b Schritten (i‘‘, j, k‘‘) und nach c Schritten (i‘‘‘, j‘‘‘, k) jeweils erstmals erreicht. Also kommt für die Anzahl l(C) der Schritte das kgV(a, b, c) als Lösung in Frage.
Damit ist der folgende Satz gezeigt:

Satz 3[§]:
Die Länge l(C) von Kreis C = C(GV: p) nach V3‘ in G = G(a, b, c) errechnet sich zu
l(C) = kgV(a, b, c). ☺

2.3.3) Startpunkt p = (i, j, k) wird verbunden mit
p‘ = (i + d, j + e, k), falls i + d (mod a), j + e ≤ b bzw. (V3*)
p‘ = (i + d, j + e, k + f), falls i + d (mod a), j + e > b, j + e (mod b), k + f (mod c) sind.

Beginnen wir mit dem Gitterpunkt (i, j, k), so erreicht man erstmals den Punkt (i, j, k*) wegen (V3*) nach genau ab Schritten und den Punkt (i*, j, k) wegen (V2) und (V3*) nach genau bc‘ Schritten, wobei c‘ = c/g(e, c) ist. Damit gilt

Satz 3*:
l(C) = kgV(ab, bc‘) = b · kgV(a, c‘) und c‘ = c/g(e, c). ☺ (7)

Beispiel 3*:
Gegeben sind das Gitter G(3, 4, 6), Vorschrift V3* mit d = 2, e = 3, f = 1 und damit ein Kreis C = C(3, 2; 4, 3; 6, 1: p(C)). Die Folge der Gitterpunkte ist:
p = 111 → 341 → 232 → 123 → 314 → 244 → 135 → 326 → 211 → 141 → 332 → 223 →
114 → 344 → 235 → 126 → 311 → 241 → 132 → 323 → 214 → 144 → 335 → 226 → 111.
Der Kreis C hat nach Gleichung (7) die Länge l(C) = 4 · kgV(3, 2)= 4 · 6 = 24.

3) Abschließende Bemerkungen

3.1) Die Anzahl γ = γ(**P**, C) der möglichen Kreise errechnet sich aus der Anzahl n(**P**) der Punkte von Menge **P** und der Länge l(C) von einem Kreis C nach der Formel γ(**P**, C) = n(**P**)/l(C).
Hat Kreis C_3 = $C_2 \Leftarrow C_1$ den Wert γ_3 = γ(**P**$_3$, C_3) = 1, so sind auch γ_2 = γ(**P**$_2$, C_2) = 1 und γ_1 = γ(**P**$_1$, C_1) = 1, aber nicht umgekehrt.
Allgemein gilt $\gamma_3 \geq \gamma_2 \cdot \gamma_1$, denn l($C_3$) ≤ l($C_2$)l($C_1$).

3.2) Wie müssen a, b, c, d, e für Kreis C gewählt werden, damit C alle Gitterpunkte von **P** durchläuft, also γ = γ(**P**, C) = 1 ist? Mit den hier hergeleiteten Formeln für die Länge l(C) eines Kreises C ergeben sich nach Vorschrift V1: a = a‘, bzw. V2: b = b‘, bzw. V3: r = s = 1, bzw. V3‘: abc = kgV(a,b,c), bzw. V3*: kgV(a, c‘) = ac.

3.3) Jedem Gitter G mit Vorschrift V kann ein gerichteter Graph $\mathcal{G} = \mathcal{G}$(G,V) mit n = n(G) Knotenpunkten zugeordnet werden, der $\gamma = \gamma$ (**P**, C) gerichtete Kreise mit der Länge l(C)= n(**P**)/γ .
In Beispiel 1 hat Graph $\mathcal{G}_1$ genau γ = 2 gerichtete Kreise der Länge l(C) = 3 als Komponenten, in Beispiel 2 hat $\mathcal{G}_2$ die Werte γ = 60 und l(C) = 12, sowie in Beispiel 3 sind für $\mathcal{G}_3$ γ = 12 und l(C) = 15.

3.4) Höherdimensionale Fälle können ganz analog behandelt werden. Gegeben sind ein endliches Gitter G mit Dimension Δ = Δ(G) und Vorschrift VΔ, die den Vorschriften V1, V2, V3, jeweils von links beginnend, entspricht.

<u>Beispiel Δ</u>:
Gegeben sind in G_1 = G(5, 4, 9) ein Kreis $C_1 = C(a_1, d_1; b_1, e_1; c_1, f_1: p(C_1))$ = C(5, 4; 4, 3; 9, 4: $p(C_1)$) und in G_2 = G(7, 6) ein Kreis $C_2 = C(a_2, d_2; b_2, e_2: p(C_2))$ = C(7, 4; 6, 5: $p(C_2)$). Man betrachte in G_3 = G(7, 6, 5, 4, 9) den Kreis $C_3 = C_2 \Leftarrow C_1$ = C((7, 4; 6, 5; 5, 4; 4, 3; 9, 4: $p(C_2)p(C_1)$). Dabei bedeutet $p(C_2)p(C_1)$, dass die Koordinaten des Startpunktes $p(C_1)$ an die Koordinaten des Startpunktes $p(C_2)$ angefügt werden. Mit Satz 3 ist $l(C_3)$ = l(7, 4; 6, 5; 15, 1) = l(7, 4; 18, 1) = l(63, 2) = l(63, 1) = 63. Für h = 1, 2, 3 ist $\gamma_h = \gamma(\mathbf{P}_h, C_h)$ die Anzahl der Kreise C_h im Gitter G_h: γ_1 = 12, γ_2 = 2 und γ_3 = 120.
Kreis C_3 = C((7, 4; 6, 5; 5, 4; 4, 3; 9, 4: $p(C_2)p(C_1)$) kann aus den beiden Kreisen C_1 = C(5, 4; 4, 3; 9, 4: $p(C_1)$) und C_2 = C(7, 4; 6, 5: $p(C_2)$), die jeweils bei $p(C_1)$ = 111 bzw. $p(C_2)$ = 11 beginnen, gefunden werden.

Der Startpunkt $p_1(C)$ von Kreis C habe alle Koordinaten 1 und $p_r(C)$ ist der r-te Punkt von C, r = 1, 2, …, l(C).
Kreis C_1 hat die Punktfolge:
$p_1(C_1) = 111 \to 511 \to 441 \to 335 \to 229 \to 114 \to 514 \to 444 \to 338 \to 223 \to 117 \to 517 \to 447 \to 332 \to 226 = p_{15}(C_1)$.
Kreis C_2 hat die Punktfolge:
$p_1(C_2) = 11 \to 51 \to 26 \to 66 \to 35 \to 75 \to 44 \to 13 \to 53 \to 22 \to 62 \to 31 \to 71 \to 46 \to 15 \to 55 \to 24 \to 64 \to 33 \to 73 \to 42 = p_{21}(C_2)$.

Mit dem folgenden einfachen <u>Algorithmus</u> kann die Punktfolge für den Kreis C_3 mit Hilfe der Punktfolgen der Kreise C_2 und C_1 gefunden werden:
für $1 \leq r \leq l(C_3)$, $1 \leq s \leq l(C_2)$ und $1 \leq t \leq l(C_1)$, sei $p_r(C_3) =: p_s(C_2)p_t(C_1)$ ein Gitterpunkt von Kreis C_3 und man beginne z. B. mit der Punktfolge von Kreis C_2.
- <u>Start</u> (r = s = t = 1): $p_1(C_3) = p_1(C_2)p_1(C_1) = 11111$.
– <u>Schleife</u> ($2 \leq r \leq l(C_3) - 1$):
$p_r(C_3) = p_s(C_2)p_t(C_1)$, so erhält man entweder
$p_{r+1}(C_3) = p_{s+1}(C_2)p_t(C_1)$, falls die letzte Koordinate von $p_s(C_2)$ kleiner oder gleich der letzten Koordinate von $p_{s+1}(C_2)$, kurz $lK[p_s(C_2)] \leq lK[p_{s+1}(C_2)]$ ist, oder
$p_{r+1}(C_3) = p_{s+1}(C_2), p_{t+1}(C_1)$, falls $lK[p_s(C_2)] > lK[p_{s+1}(C_2)]$ ist.
- <u>Abbruch</u> ($r = l(C_3)$): $p_{r+1}(C_3) = p_1(C_3)$.

Damit ergibt sich für den Kreis C_3 aus den beiden Punktfolgen der Kreise C_2 und C_1 sukzessive die Punktfolge: $p(C_3) = p_1(C_2)p_1(C_1) = 11111 \to 51111 \to 26111 \to 66111 \to 35511 \to 75511 \to 44441 \to \ldots \to 42226 = p_{63}(C_3)$. Hier ist $l(C_3) = l(C_2)l(C_1)/g(e_2 = 5, 15) = 21 \cdot 15/5 = 63$.

3.5) Da ein Kreis C von Gitter G nach Vorschrift V eindeutig bestimmt ist, kann auch so argumentiert werden. Kreis C repräsentiert eine *zyklische Gruppe* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}$(C) der Ordnung l(C). Mit der Verknüpfung

„$C_3 = C_2 \Leftarrow C_1$" der beiden Kreise C_1, C_2 zum Kreis C_3 des Gitters $G_3 = G_2 \times G_1$ werden zwei zyklische Gruppen $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}(C_1)$ und $\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}(C_2)$ in die zyklische Gruppe $\mathcal{Z}_3 = \mathcal{Z}(C_3)$ transformiert. Dabei ist zu beachten, dass Kreis C_h zum Gitter G_h mit der Punktmenge $\mathbf{P}_h$ gehört (h = 1, 2, 3).
Im Beispiel Δ haben die zyklischen Gruppen $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ und $\mathcal{Z}_3$ jeweils die Ordnung $l(C_1) = 15$, $l(C_2) = 21$ bzw. $l(C_3) = l(C_1)l(C_2)/g(e_2, a_1) = 63$.

3.6) Abschließend noch drei Beispiele mit jeweils linearer Vorschrift V2'a, V2'b und V2'c:

Gegeben sind das zweidimensionale Gitter G = G(a = 3, b = 4), P = P(a, b) = {(i, j); $1 \le i \le a$, $1 \le j \le b$ }, und die drei Vorschriften (V2'a), (V2'b) und (V2'c).
Startpunkt $p = (i, j)$ wird verbunden mit

$p' = (i + 2, j)$, falls $i + 1 \le 3$, und mit (V2'a)
$p' = (i + 2, 2j + 1)$ falls $i + 1 > 3a$, $i + 1 \pmod{3}$ und $3j + 1 \pmod{4}$ sind

bzw. mit

$p' = (i + 2, j)$ verbunden, falls $i + 2 \le 3$, und mit (V2'b)
$p' = (i + 2, 3j + 1)$ falls $i + 2 > 3$, $i + 2 \pmod{3}$ und $3j + 1 \pmod{4}$ sind.

bzw. mit

$p' = (2i + 2, 2j + 3)$ falls $2i + 2 \pmod{3}$ und $3j + 2 \pmod{4}$ sind. (V2'c)

Jedem Punkt p von Gitter G werde ein Knotenpunkt $v = v(p)$ eines gerichteten Graphen $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{B})$ mit der *Knotenpunktmenge* $\mathcal{V} = V(\mathcal{G})$ und der *Bogenmenge* $\mathcal{B} = B(\mathcal{G})$ zugeordnet. Für $p \to p'$ ergibt sich in dem gerichteten Graphen $\mathcal{G}$ somit ein Bogen $v = v(p) \to v(p') = v'$ bzw. (v, v') .

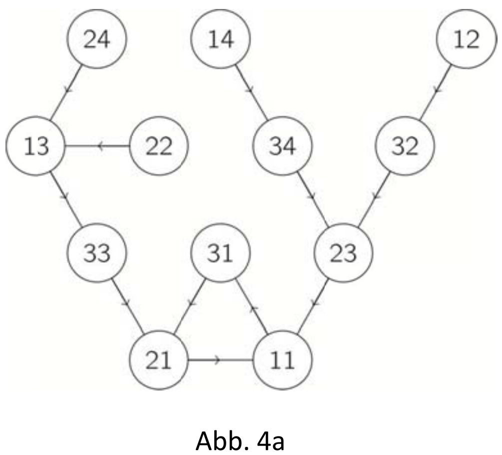

Abb. 4a

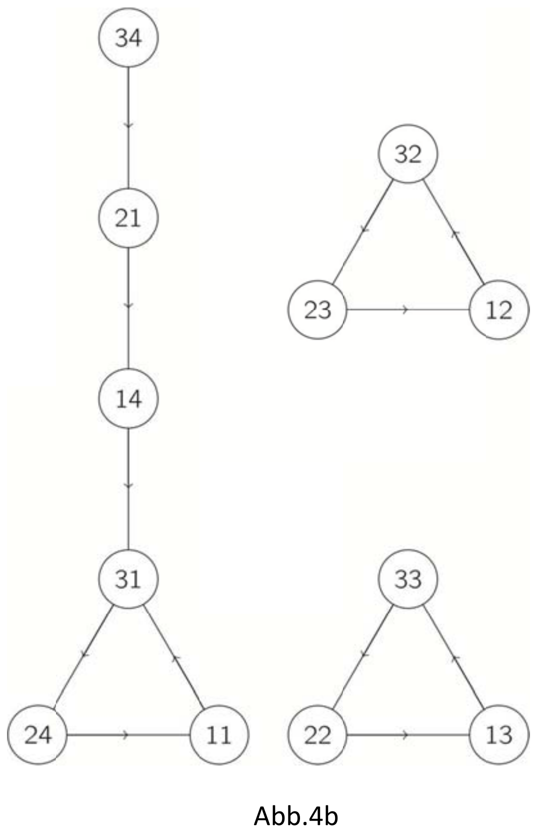

Abb.4b

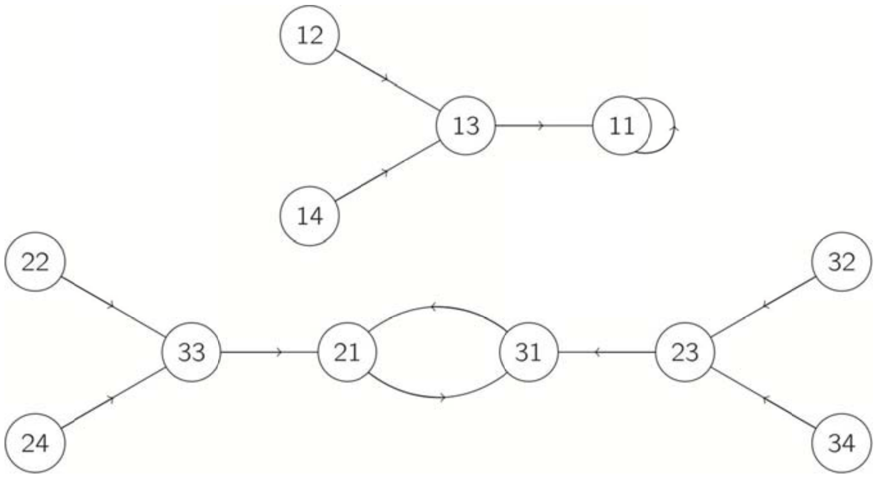

Abb. 4c

Ein Knotenpunkt eines gerichteten Graphen $\mathcal{G}$ heiße *Quelle* von $\mathcal{G}$, falls er keinen Vorgänger besitzt. Am Knotenpunkt v von Graph $\mathcal{G}$ befindet sich eine *gerichtete Schlinge*, falls mit der vorhandenen Vorschrift $v \to v$ vorliegt. In diesem Fall sei Knotenpunkt v *Senke* von Graph $\mathcal{G}$.

In Abb. 4a, b, c sind die gerichteten Graphen $\mathcal{G}_a$ von (V2'a), $\mathcal{G}_b$ von (V2'b) und $\mathcal{G}_c$ von (V2'c) dargestellt.
Während $\mathcal{G}_a$ einen Kreis, vier Quellen und zusammenhängend ist, hat $\mathcal{G}_b$ drei Kreise, genau eine Quelle „34" und drei Komponenten. Graph $\mathcal{G}_c$ hat zwei Komponenten mit insgesamt sechs Quellen und genau einen Zweikreis, der die Knotenpunkte „21" und „31" enthält. Der Knotenpunkt „11" ist eine Senke von Graph $\mathcal{G}_c$.

An dieser Stelle möchte ich Frau Barbara Hamann (TU Ilmenau) für die sorgfältige Anfertigung der Abbildungen danken.